Katedra Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn
POLITECHNIKA OPOLSKA

Modelowanie i symulacja w projektowaniu

W02
Modelowanie
Metoda schematu operacyjnego

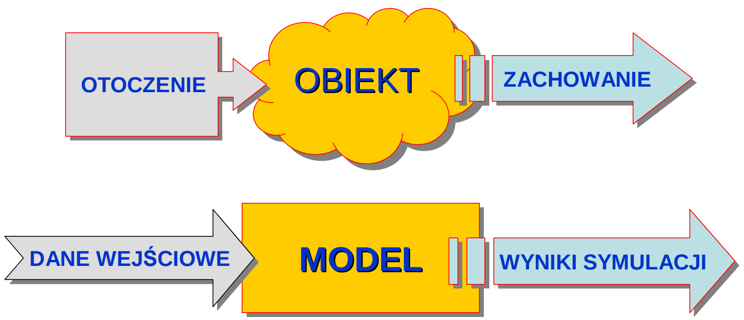
dr inż. Roland PAWLICZEK

Zakres tematyczny

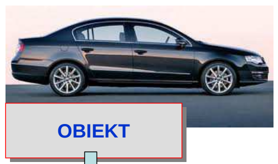
- ***Model, modelowanie – definicje.***
- ***Model fizyczny i matematyczny układu dynamicznego.***
- ***Modelowanie z wykorzystaniem równań różniczkowych.***
- ***Budowa algorytmu rozwiązywania równań metodą schematu operacyjnego.***

Model

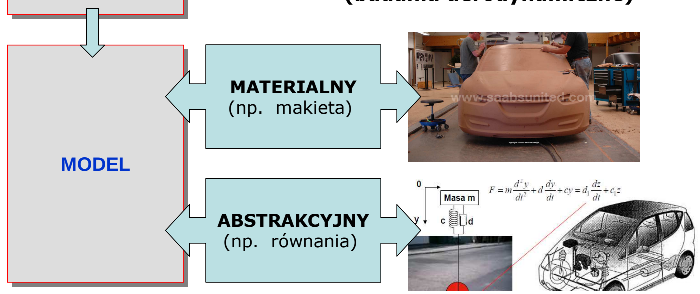
Model *- układ, który na skutek wymuszeń, zachowuje się podobnie jak modelowany układ (**obiekt**) w zakresie interesujących nas zachowań.*



Model



MODELE:
abstrakcyjne np. rysunki, tabele, wykresy, równania matematyczne
materialne np. makieta, prototyp (badania aerodynamiczne)



Model

MODEL
Powinien być:

POPRAWNY
•Logiczny
•Jednoznaczny
•Kompletny

Problem jest sformułowany poprawnie i posiada rozwiązania w określonych zbiorach (np. ruszając z miejsca pojazd nie może mieć przyspieszenia ujemnego)

UŻYTECZNY
•Jednoznaczne rozwiązania równań
•Wyniki ilościowe
•Możliwość porównania wyników z wielkościami rzeczywistymi

Rozwiązanie równań modelu nie pozostawia wątpliwości co do wyniku i wyniki reprezentują określone wielkości fizyczne, które ostatecznie można porównać z parametrami pracy obiektu

Modelowanie

Cele modelowania:
- ***zrozumieć zjawisko, pracę obiektu –*** *co i dlaczego się zdarzyło, jakie są skutki*
- ***optymalizacja pracy obiektu –*** *co zrobić, aby* obiekt zachowywał się korzystny z punktu widzenia przyjętego kryterium
- ***przewidywanie pracy obiektu –*** *jak na podstawie przyczyn określić możliwe skutki*
- ***prognozowanie „wymuszeń"–*** *jak na podstawie skutków określić przyczyny*

Modelowanie

Modelowanie: *wyszukiwanie w systemie (otoczenie → obiekt → skutek) cech i związków istotnych ze względu na dany cel.*

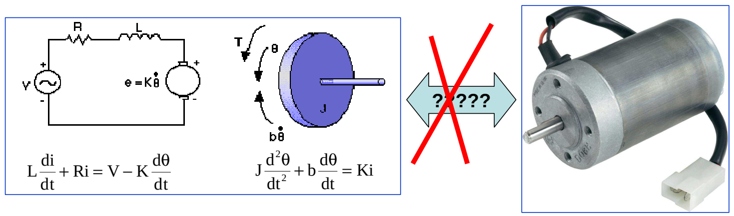
Modelowanie matematyczne: symbole *i* ***relacje matematyczne*** *pomiędzy symbolami oraz* ***zasady*** *ich przetwarzania i operowania nimi.*

SYMBOLE ⇔ *elementy i parametry opisujące obiekt*

RELACJE I ZASADY PRZETWARZANIA ⇔ *korespondują do zjawisk i zachowania się obiektu.*

Modelowanie

Uproszczenia: *modele są uproszczone z założenia! Zwykle nie ujmują wszystkich szczegółów modelowanego obiektu.*



Nie jest to wada modelu. Uproszczenia pozwalają uniknąć komplikacji modelu poprzez usunięcie z rozważań elementów mało istotnych lub pozwalają odizolować obiekt od pewnych wielkości np. temperatury. ***SKUPIAMY SIĘ NA ISTOCIE SYMULACJI.***

Modelowanie

Etapy modelowania:

Sformułowanie problemu: zrozumienie i rozpoznanie zjawiska, zdefiniowanie problemu i określenie celu symulacji.

Określenie celów szczegółowych: plan działań i organizacja pracy zmierzająca do opracowania modelu.

Koncepcja modelu: zapis działania rzeczywistego obiektu i relacji w nim zachodzących w postaci algorytmów, tabel, wykresów, zależności matematycznych (wzorów).
Model powinien być stopniowo uszczegóławiany.

Modelowanie

Zbieranie danych: konieczne do określenia wartości parametrów wprowadzanych do modelu w procesie symulacji i ewentualnie porównania z wynikami symulacji

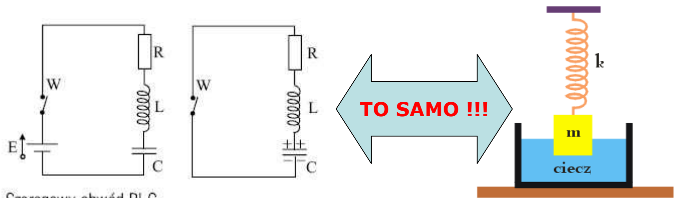
Programowanie modelu: określenie algorytmów obliczeniowych oraz wybór systemu oprogramowania i napisanie programu.
Powstaje **Model komputerowy (numeryczny):** powinien być zgodny z modelem matematycznym i łatwy w użytkowaniu.

Ocena modelu:
• Weryfikacja: analiza kodu programu komputerowego, czy odpowiada modelowi matematycznemu
•Walidacja: sprawdzenie czy wyniki działania programu odpowiadają zebranym danym odpowiadającym zjawiskom i zachowaniu się obiektu.

SYMULACJA

Modelowanie

ILE ISTNIEJE MODELI MATEMATYCZNYCH?
Czy liczba modeli = Liczba obiektów?



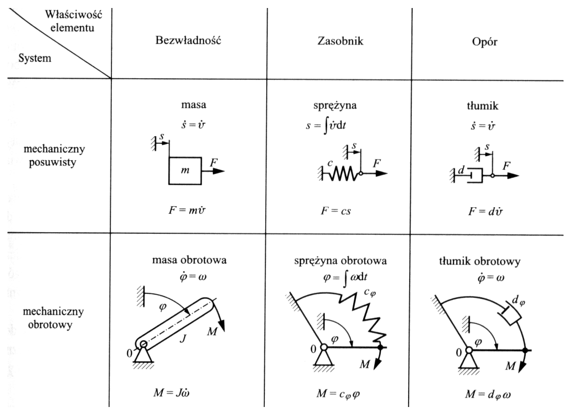
Szeregowy obwód RLC

$$\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dI}{dt}+\frac{1}{LC}I=0$$

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}+b\frac{dx(t)}{dt}+kx(t)=0$$

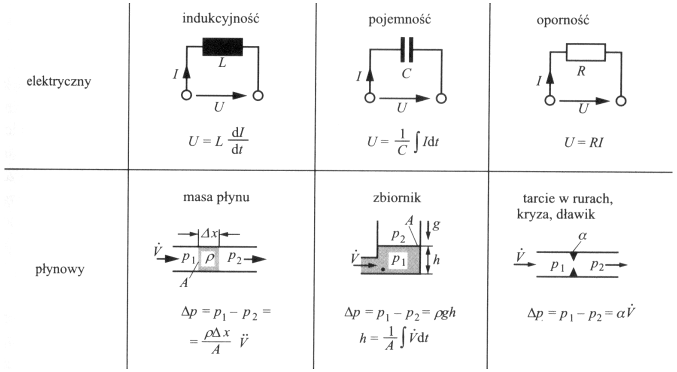
Modelowanie

Analogie systemowe:



Modelowanie

Analogie systemowe:



Model fizyczny i matematyczny układu dynamicznego

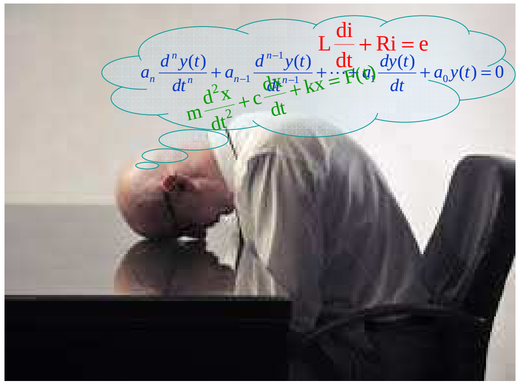
***Układ dynamiczny**:*

- *przebiegi zmian wartości wielkości fizycznych rozpatruje się jako funkcje czasu,*
- *na wartości wielkości wyjściowych systemu w chwili t, mają wpływ wartości wielkości wejściowych w tej właśnie chwili **oraz** ich wartości w chwilach wcześniejszych (sprzężenie zwrotne),*
- *układ dynamiczny zwykle zawiera elementy posiadające zdolność **magazynowania** i **oddawania** energii (np. sprężyny, kondensatory, cewki)*

MODEL MATEMATYCZNY UKŁADÓW DYNAMICZNYCH ZWYKLE BAZUJE NA RÓWNANIACH RÓŻNICZKOWYCH

Model fizyczny i matematyczny układu dynamicznego

Zdecydowana większość zagadnień inżynierskich ma charakter dynamiczny !!!



Model fizyczny i matematyczny układu dynamicznego

Zagadnienia inżynierskie → analiza zjawisk fizycznych:
ruch, wymiana ciepła, przepływ medium, układy elektryczne

Model fizyczny:

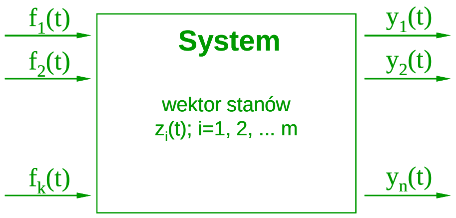
- *przedstawia uproszczony układ badany i jest wyrażony za pomocą pojęć fizycznych (nauka i technika).*
- *zawiera opis zjawisk (które należy opisać matematycznie), założenia oraz możliwe uproszczenia.*

Uproszczenia:

- *pominięcie wpływu zakłóceń losowych,*
- *pominięcie nieistotnego oddziaływania otoczenia na układ,*
- *pominięcie nieistotnych oddziaływań między elementami układu,*
- *traktowanie elementów jako brył idealnie sztywnych lub mas skupionych.*

Model fizyczny i matematyczny układu dynamicznego

Model matematyczny: *zbudowana na podstawie* ***teorii danego zjawiska*** *(fizycznego, chemicznego, ekonomicznego, itp.) i stosowanych teorii matematycznych, opisujących jego istotne cechy za pomocą równań (np. różniczkowych).*



$f_k(t)$ *– sygnały wejściowe (sterowanie i zakłócenia)*
$y_n(t)$ *– sygnały wyjściowe (odpowiedź układu)*
$z_i(t)$ *– wektor stanu (parametry i zmienne układu)*

Model fizyczny i matematyczny układu dynamicznego

Układ dynamiczny

Nieliniowy	**Liniowy**
Nie jest LINIOWY !!! ***Funkcje zawierają wyrażenia potęgowe lub iloczyny zmiennych lub inne funkcje nieliniowe.*** ***Poprzez uproszczenia i przekształcenia dokonuje się linearyzacji.***	***Podlega przekształceniom liniowym: Jeżeli X i Y są pewnymi obiektami A jest funkcją to układ*** ***- jest addytywny A(X+Y)=A(X)+A(Y)*** ***- jest jednorodny A(cX)=cA(X)*** ***Warunek linowości: A(cX+dY)=cA(X)+dA(Y)***

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\sin(\theta)=0$$

uproszczenie

$$\theta\approx 0$$

$$\sin(\theta)\approx\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\theta=0$$

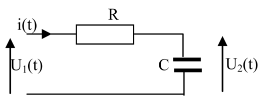
Model fizyczny i matematyczny układu dynamicznego

Postać ogólna *równania różniczkowego liniowego o stałych współczynnikach:*

$$a_n\frac{d^n y}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\ldots+a_1\frac{dy}{dt}+a_0y=b_m\frac{d^m u}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}}+\ldots+b_1\frac{du}{dt}+b_0u$$

Skąd brać równania?

<u>1. Ze wzorów opisujących fizykę układu:</u>

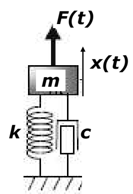


Prawo Kirchoffa

$u_1(t)=i(t)\cdot R+u_2(t)$

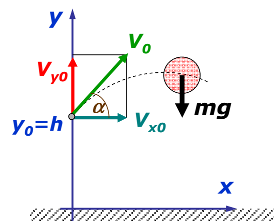
II zasada dynamiki Newtona

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=F(t)$$



Model fizyczny i matematyczny układu dynamicznego

Przykład:



a) *II zasada dynamiki Newtona:*

$$\vec{F}=m\cdot\vec{a}$$

b) zasada Galileusza**:** składowe ruchu w ortogonalnych kierunkach x,y można rozpatrywać niezależnie. Określamy zatem składowe sił, przyspieszenia, prędkości i przemieszczenia dla każdej osi oddzielnie.

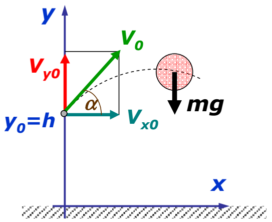
$$a=\frac{dv}{dt}\qquad v=\frac{ds}{dt}$$

$$a_x=\frac{dv_x}{dt}\qquad a_y=\frac{dv_y}{dt}$$

$$v_x=\frac{dx}{dt}\qquad v_y=\frac{dy}{dt}$$

Model fizyczny i matematyczny układu dynamicznego

Przykład:



$$F_x = 0 \quad a_x = 0 \quad \frac{dv_x}{dt} = 0$$

$$v_x(t) = \int \frac{dv_x}{dt}(t)dt = \int 0dt = C$$

$$dla\, t = 0, v_x = v_{x0} = v_0 \cos\alpha_0 \Rightarrow C = v_{x0}$$

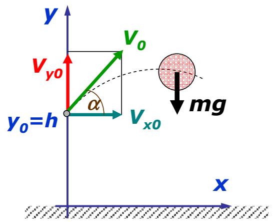
$$x(t) = \int \frac{dx}{dt}(t)dt = \int v_x(t)dt = \int v_{x0}dt = v_{x0}t + D$$

$$dla\, t = 0, x(0) = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$x(t) = v_{x0} \cdot t$$

Model fizyczny i matematyczny układu dynamicznego

Przykład:



$$F_y = -mg \quad a_y = -g \quad \frac{dv_y}{dt} = 0$$

$$v_y(t) = \int \frac{dv_y}{dt}(t)dt = \int -gdt = -gt + C$$

$$dla\, t = 0, v_y = v_{y0} = v_0 \sin\alpha_0 \Rightarrow C = v_{y0}$$

$$v_y(t) = -gt + v_{y0}$$

$$y(t) = \int \frac{dy}{dt}(t)dt = \int v_y dt = \int \left(-gt + v_{y0}\right)dt =$$

$$= -\frac{1}{2}gt^2 + v_{y0}t + D$$

$$dla\, t = 0, y(0) = y_O \Rightarrow D = y_0 = h$$

$$y(t) = h + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$$

Model fizyczny i matematyczny układu dynamicznego

2. Ogólne równania (zwykle bazujące na energii układu)

Równanie Lagrange'a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i - R_i$$

T- energia kinetyczna
V - energia potencjalna
Q_i - zewnętrzna siła wymuszająca
R_i - siła oporu
q_i - współrzędna uogólniona

Symulacja komputerowa

Celem symulacji jest otworzenie przebiegu badanego procesu na podstawie jego modelu matematycznego za pomocą komputera i zbadanie wpływu otoczenia (sygnały wejściowe) i wewnętrznych właściwości obiektu (parametry procesu) na charakterystyki obiektu.

ZALETY:

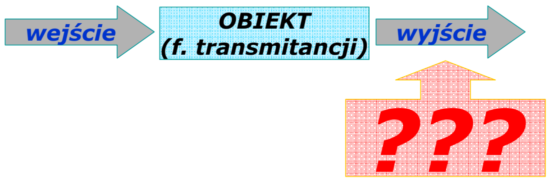
- *Elastyczność modelu, czyli łatwość wprowadzania zmian.*
- *Łatwość wprowadzania wymuszeń i zakłóceń.*
- *Niewielki koszt i czas przygotowania symulacji.*
- *Wiarygodność wyników symulacji - przy określonych metodach weryfikacji: eksperyment lub pomiar w warunkach rzeczywistych.*

Symulacja komputerowa

Cele symulacji:

Prognozowanie (symulacja pracy układu):

Poznanie właściwości modelu - charakterystyki. Wyznaczenie funkcjonowania badanego systemu dla określonych warunków.

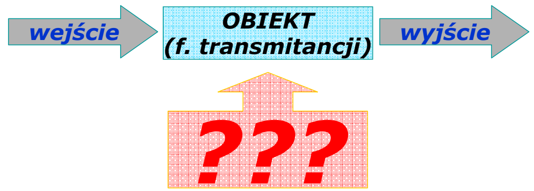


Symulacja komputerowa

Cele symulacji:

Identyfikacja (rozpoznanie obiektu):

Tworzenie opisów, zasad, praw funkcjonowania badanego systemu.

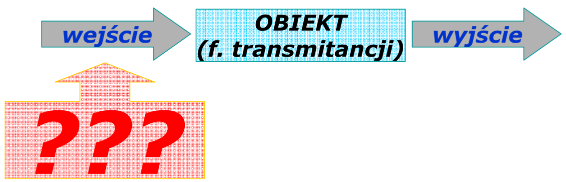


Symulacja komputerowa

Cele symulacji:

Optymalizacja (rozpoznanie obiektu):

Wyznaczenie warunków funkcjonowania badanego systemu, przy których jego praca, funkcjonowanie spełniają określone kryteria racjonalności: dokładność, niski koszt, wydajność, szybkość, itp.



Symulacja komputerowa

Modele symulacyjne:

Modele ciągłe:

zmiana parametrów systemu ma charakter ciągły (funkcja ciągła). Zwykle dotyczy badania zmian w czasie.

Modele dyskretne (wielostanowe):

zmiana stanów systemu ma charakter dyskretny (funkcja dyskretna). System przyjmuje ściśle określone stany zależnie od warunków pracy układu.

Modele mieszane:

Zmiana stanów systemu ma charakter ciągło-dyskretny (funkcja ciągła i dyskretna). Czasami funkcję ciągłą zastępuje się dyskretnymi wartościami na określonych poziomach.

Budowa algorytmu rozwiązywania równań

Metoda schematu operacyjnego

Metoda polega na przekształceniu równania do postaci, w której człon najwyższej pochodnej znajduje się po lewej stronie równania a następnie wykorzystaniu operacji całkowania.

Dla uproszczenie równanie ma postać:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = ku$$

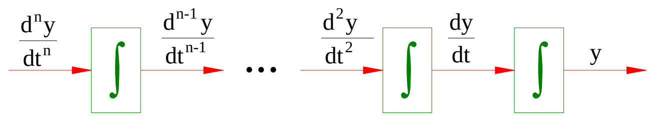
Budowa algorytmu rozwiązywania równań

ALGORYTM WG. SCHEMATU OPERACYJNEGO:

1. Przekształcenie równania

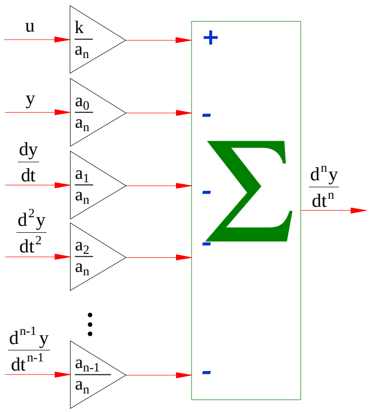
$$\boxed{\frac{d^n y}{dt^n}} = \frac{k}{a_n}u - \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} - \ldots - \frac{a_2}{a_n}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{a_1}{a_n}\frac{dy}{dt} - \frac{a_0}{a_n}y$$

2. Wykonanie całkowania kolejnych pochodnych



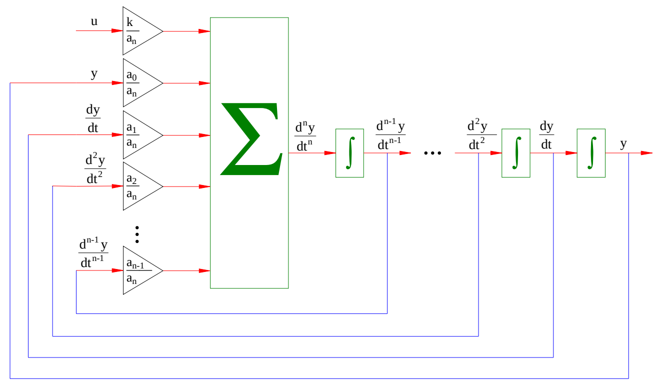
Budowa algorytmu rozwiązywania równań

3. Węzeł sumacyjny sygnałów wejściowych dla $\frac{d^n y}{dt^n}$



Budowa algorytmu rozwiązywania równań

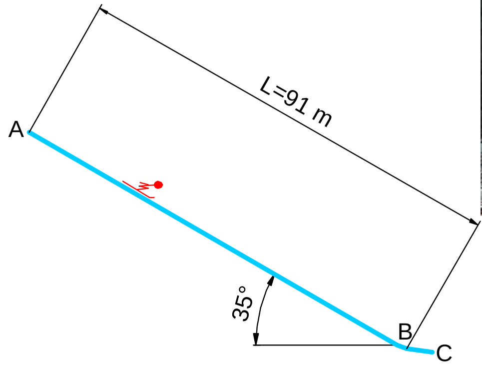
4. Skierowanie wyników całkowania na wejście węzła sumacyjnego



Przykład

Przykład

Obiekt i model



Przykład

Założenia:

1. *Symulacja wpływu smarowania i sylwetki na prędkość na progu.*
2. *Masa skoczka jest ustalona.*
3. *Tory są idealnie zmrożone i jednorodne na całej długości rozbiegu.*

Uproszczenia:

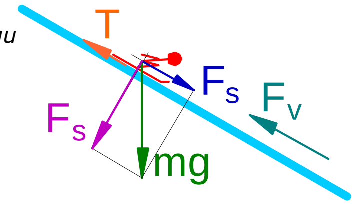
1. *Pomijamy odcinek progu (6,5m) – mała strata prędkości.*
2. *Rozbieg traktujemy jako prostoliniowy*
3. *Współczynnik tarcia nie zależy od prędkości.*
4. *Pomijamy wpływ prędkości wiatru na rozbiegu.*

Przykład

Model fizyczny: *rozpatrujemy ruch prostoliniowy jednostajnie przyspieszony bez prędkości początkowej – II zasada dynamiki Newtona*

Model matematyczny:

m – masa skoczka
g – przyspieszenie ziemskie
F_s – składowa styczna do rozbiegu
F_n – nacisk skoczka na rozbieg
T – tarcie nart o tory
F_v – siła oporu powietrza



$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_s - T - F_v$$

Przykład

podstawienia:

$$F_s = mg\sin\alpha$$

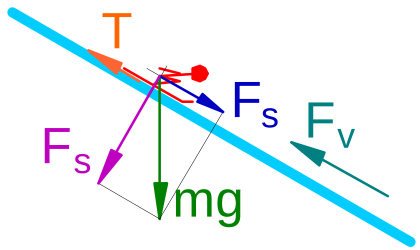
$$T = \mu F_n = \mu mg\cos\alpha$$

$$F_v = \frac{cS\rho v^2}{2}$$

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha - \frac{cS\rho v^2}{2}$$

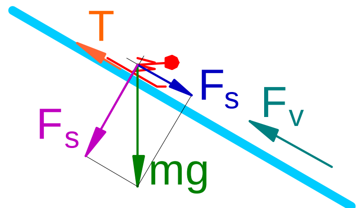
$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - \frac{cS\rho}{2m}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$$



Przykład

Dane:

m=75 kg
g=9,81 m/s²
μ=0,05
c=1
S=0,5 m²
α=35°
ρ=0,9 mg/cm³

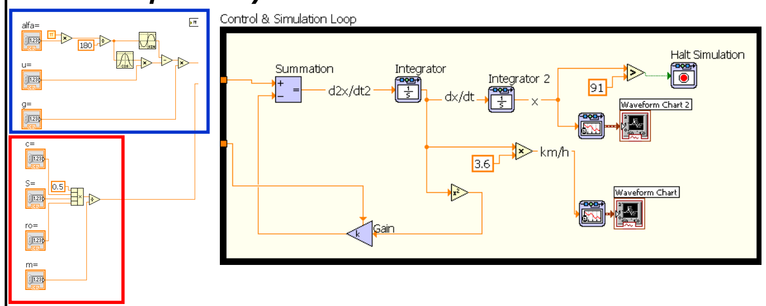


μ - wsp. tarcia narty-lód
c – wsp. kształtu skoczka (0,6-2,0)
S – powierzchnia czołowa skoczka
α – nachylenie rozbiegu
ρ – ciężar właściwy powietrza

c=0,6 ***S=0,4 m²***

Przykład

Model komputerowy:

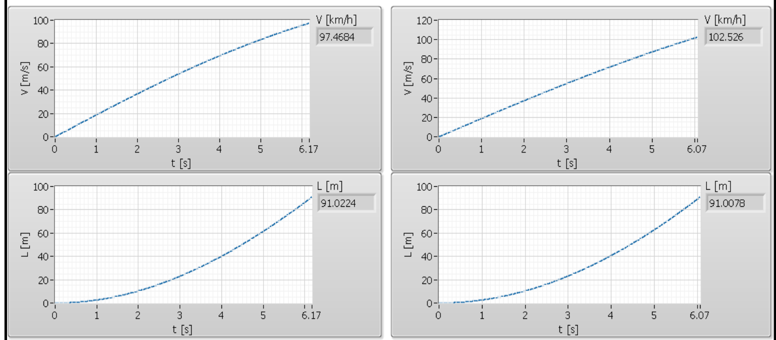


$$\frac{d^2x}{dt^2} = \boxed{g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)} - \boxed{\frac{cS\rho}{2m}}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

Przykład

Wyniki symulacji:

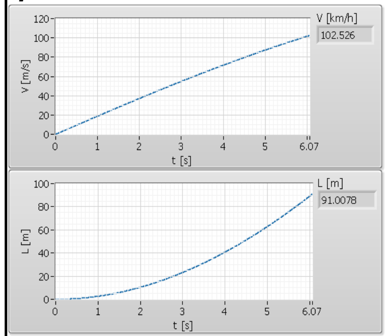
c=1.0 ***c=0.6***



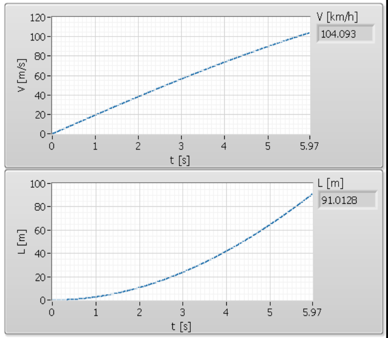
Przykład

Wyniki symulacji:

μ=0.05



μ=0.03



Przykład

Całkiem poważna sprawa: