Katedra Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn
POLITECHNIKA OPOLSKA

Modelowanie i symulacja w projektowaniu

W03
Przekształcenie Laplace'a
Transmitancja
Model transmitancyjny

dr inż. Roland PAWLICZEK

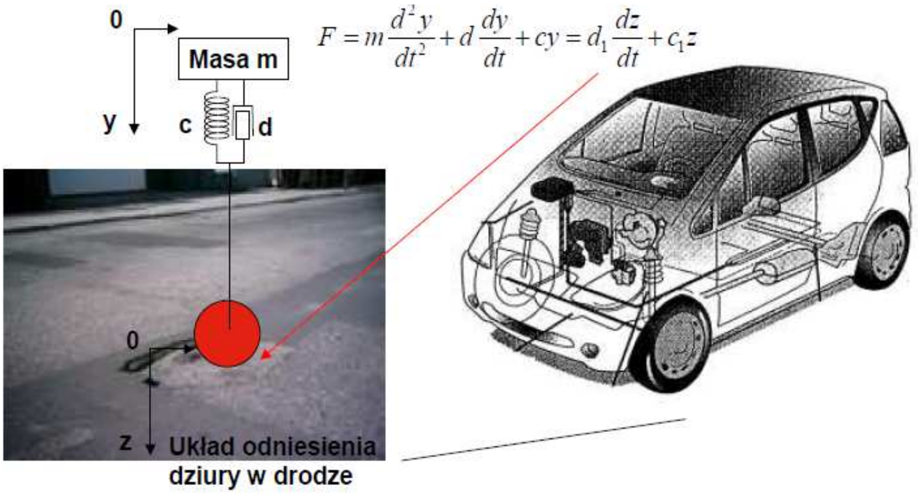
Zakres tematyczny

- ***Przekształcenie Laplace'a – definicje interpretacja.***
- ***Transmitancja operatorowa***
- ***Budowa algorytmu rozwiązywania równań z zastosowaniem transmitancji.***
- ***Transmitancja w pętli symulacyjnej.***

Przekształcenie Laplace'a

Równania różniczkowe jako metoda opisu układów dynamicznych.

$$F = m\frac{d^2y}{dt^2} + d\frac{dy}{dt} + cy = d_1\frac{dz}{dt} + c_1 z$$



Przekształcenie Laplace'a

*W najbardziej ogólnym przypadku sygnał wyjściowy **y(t)** może być równaniem różniczkowym wyższego rzędu sygnału wejściowego **u(t)***

$$a_n\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) =$$

$$= b_m\frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}u(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1\frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t),$$

gdzie $\boldsymbol{a_i}$ *dla i=0..n,*

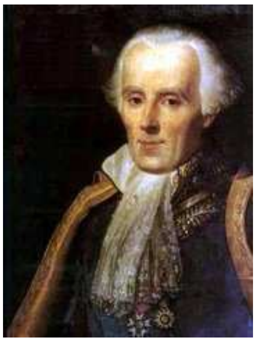
$\boldsymbol{b_i}$*, dla i=0..m*

są stałymi współczynnikami równania

Przekształcenie Laplace'a

Jak sobie ułatwić życie...

Pierre-Simon markiz de Laplace
23 III 1749 – 5 III 1827



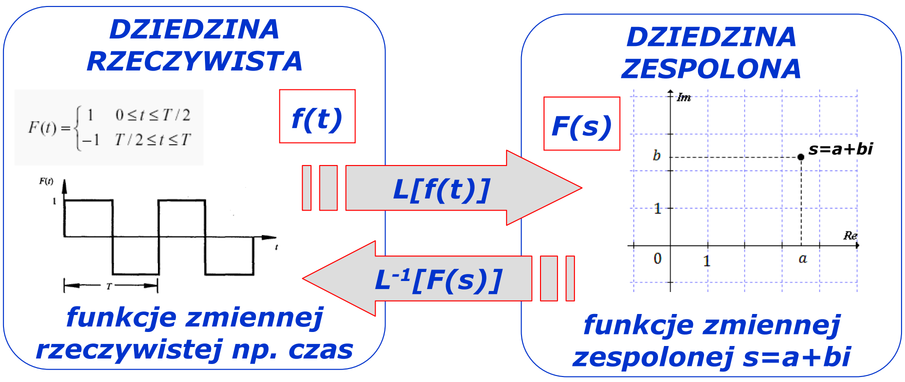
- *Laplace wymyślił narzędzie matematyczne zwane* ***transformatą Laplace'a x(t) → X(s)***
- *Jego zaletą jest możliwość rozwiązania równania różniczkowego po przekształceniu go w równanie algebraiczne*
- *Należy przejść na płaszczyznę Gaussa F(s), przekształcić równanie i otrzymać rozwiązanie w dziedzinie czasu posługując się odwrotną transformatą Laplace'a*

Przekształcenie Laplace'a

*Przekształcenie przeprowadzające pewną funkcję **f(t)** (tzw. **oryginał**), w funkcję zmiennej zespolonej **f(s)** (tzw. **obraz**), przy czym*

$$L[f(t)] = f(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

gdzie: ***s∈C****; C – zbiór liczb zespolonych, s – liczba zespolona, t – czas.*



Przekształcenie Laplace'a

Tw. o liniowości transformaty:

$$L[A\cdot f(t)+B\cdot f(p)]=A\cdot Lf(t)+B\cdot Lf(p)$$

Transformata pochodnej:

$$L[f'(t)]=sf(s)-f(0)$$
$$L[f''(t)]=s^2f(s)-sf(0)-f'(0)$$

Przekształcenie Laplace'a

Przykład: $\frac{dy}{dt}-3y=1$

$$L\left(\frac{dy}{dt}-3y\right)=L(1)$$
$$L\left(\frac{dy}{dt}\right)-3L(y)=L(1)$$
$$L(y')-3L(y)=L(1)$$

$L(y')=sy(s)-y(0)$ $\quad$ $3L(y)=3y(s)$ $\quad$ $L(a)=\frac{a}{s}$ czyli $L(1)=\frac{1}{s}$

dla $y(0)=0$ $\quad$ $L(y')=sy(s)$

$$sy(s)-3y(s)=\frac{1}{s}$$
$$y(s)\cdot(s-3)=\frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y(s)=\frac{1}{s(s-3)}=\frac{1}{s^2-3s}}$$

Przekształcenie Laplace'a

dla $y(s) = \dfrac{1}{s(s-3)}$

z tablic $F(s) = \dfrac{1}{s(s+\alpha)}$ $\rightarrow$ tutaj $\alpha = -3$

oryginał z tablic $y(t) = \dfrac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})$

ostatecznie $y(t) = -\dfrac{1}{3}(1 - e^{3t}) = \dfrac{1}{3}(e^{3t} - 1)$

lp.	Oryginał	Transformata
1	$1(t)$	$\frac{1}{s}$
2	$\delta(t)$	1
3	αt	$\frac{\alpha}{s^2}$
4	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5	$e^{\pm\alpha t}$	$\frac{1}{s \mp \alpha}$
6	$\frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})$	$\frac{1}{s(s+\alpha)}$
7	$\cos \alpha t$	$\frac{s}{s^2 + \alpha^2}$
8	$\sin \alpha t$	$\frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$

Transmitancja

Zwykle relacja pomiędzy sygnałem wyjściowym y(t) i wejściowym u(t) systemu jest opisywana za pomocą równań różniczkowych:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) =$$
$$= b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t),$$

lub z wykorzystaniem przekształcenia Laplace'a: ***L[y(t), u(t)]***

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 \;=\; b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0$$

Transmitancja

Funkcję przetwarzającą sygnał wejściowy na wyjściowy (transmitancja obiektu) można określić jako:

$$G(s)=\frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s + a_0}$$

Def. *Transmitancja operatorowa G(s) (funkcja przejścia, przepustowość) to stosunek transformaty sygnału wyjściowego do transformaty sygnału wejściowego przy zerowych warunkach początkowych równania różniczkowego*

$$Y(s)=G(s)U(s)$$

Transmitancja

Jeżeli jest znana transmitancja operatorowa obiektu G(s) oraz sygnał sterujący U(s), to można wyznaczyć sygnał wyjściowy z obiektu

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+2y=\frac{du}{dt}+2u \qquad /L[]$$

$$s^2Y(s)+2sY(s)+2Y(s)=sU(s)+2U(s)$$

$$Y(s)\cdot(s^2+2s+2)=U(s)\cdot(s+2) \qquad /\frac{1}{U(s)(s^2+2s+2)}$$

$$\boxed{G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{s+2}{s^2+2s+2} \quad \Rightarrow \quad Y(s)=U(s)\frac{s+2}{s^2+2s+2}}$$

$$\text{dla} \qquad u(t)=1\rightarrow U(s)=\frac{1}{s}\rightarrow Y(s)=\frac{1}{s}\cdot\frac{s+2}{s^2+2s+2}=\frac{s+2}{s^3+2s^2+2s}$$

Transmitancja

$$T\frac{dy}{dt} + y = u$$

$$TsY(s) + Y(s) = U(s)$$

$$Y(s) \cdot (Ts + 1) = U(s)$$

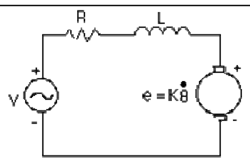
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$$

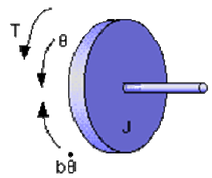
Transmitancja ma postać ułamka:

$$G(s) = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{[\text{Numerator}]}{[\text{Denominator}]}$$

Transmitancja

Model fizyczny silnika prądu stałego i równania układu



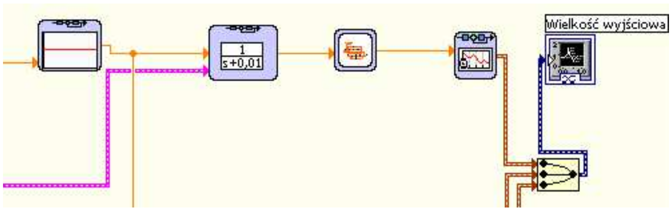


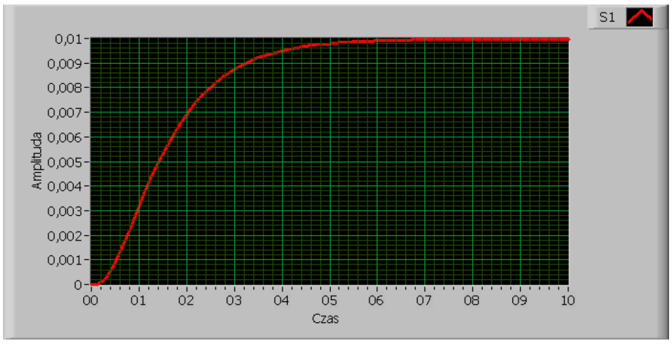
Model układu elektrycznego	Model układu mechanicznego
$L\frac{di}{dt} + Ri = V - K\frac{d\theta}{dt}$	$J\frac{d^2\theta}{dt^2} + b\frac{d\theta}{dt} = Ki$

J- moment bezwładności wirnika; b- współczynnik tłumienia układu mechanicznego;
K- stała silnika; R- opór elektryczny; L- indukcyjność; V- napięcie źródła (wejście)
θ- kat obrotu wałka silnika (wyjście); założono, że stojan i wirnik są ciałami sztywnymi

transmitancja układu:
$$\boxed{\frac{\theta(s)}{V(s)} = \frac{K}{(Js + b)(Ls + R) + K^2}}$$

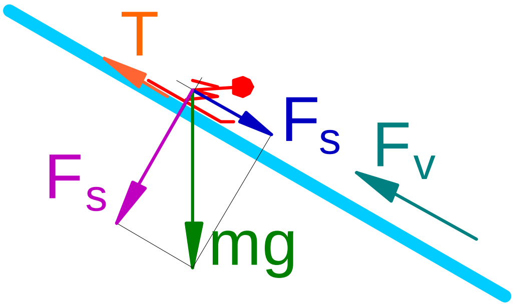
Model transmitancyjny





Przykład

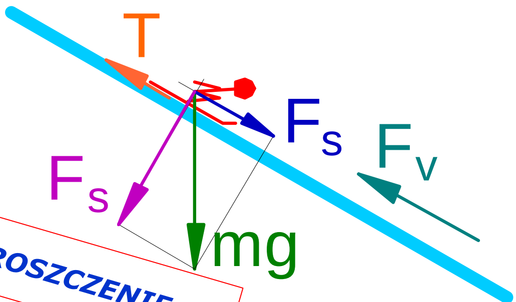
Przykład



$$F_s = mg\sin\alpha$$
$$T = \mu F_n = \mu mg\cos\alpha$$
$$F_v = \frac{cS\rho v^2}{2}$$
$$v = \frac{dx}{dt}$$
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha - \frac{cS\rho v^2}{2}$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - \frac{cS\rho}{2m}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

PROBLEM !!!

Przykład



$$F_s = mg\sin\alpha$$
$$T = \mu F_n = \mu mg\cos\alpha$$
$$F_v = \frac{cS\rho v}{2}$$
$$v = \frac{dx}{dt}$$
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha - \frac{cS\rho v}{2}$$
$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - \frac{cS\rho}{2m}\frac{dx}{dt}}$$

UPROSZCZENIE !!!

Przykład

$$\text{dla } k = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \qquad \text{oraz} \qquad A = \frac{cS\rho}{2m}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = k - A\frac{dx}{dt}$$

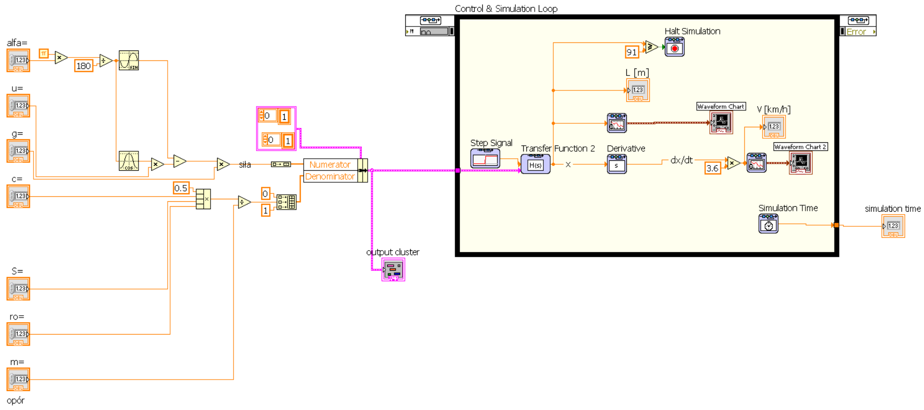
$$\frac{d^2x}{dt^2} + A\frac{dx}{dt} = k \cdot F(t) \qquad \text{gdzie} \quad F(t) = 1$$

$$s^2X(s) + AsX(s) = k \cdot F(s)$$

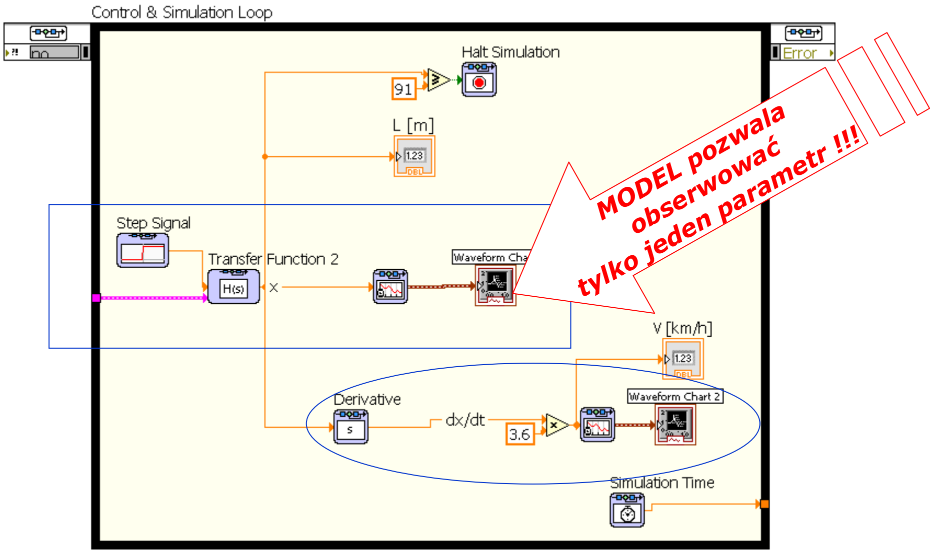
$$X(s)(s^2 + As) = k \cdot F(s)$$

$$\boxed{G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{k}{s^2 + As}}$$

Przykład



Przykład



Po co się męczyć i nie korzystać z metody schematu operacyjnego !?

$$G_1 = f\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{dx}{dt}, x, a_1\right)$$

$$G_2 = f\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{dx}{dt}, x, a_2\right)$$